الإشتقاق و تطبيقاته

سيدي محمد لخضر

الفهرس

القدرات المنتظرة

- تقريب دالة بجوار نقطة بدالة تالفية.
- التعرف على ان العدد المشتق لدالة في x_0هو المعامل الموجه لمماس منحناها في النقطة التي افصولها x_0.
- التعرف على مشتقات الدوال المرجعية.
- التمكن من تقنيات حساب مشتقة دالة.
- تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة و انشاؤه.
- تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة اشارة مشتقتها.
- تحديد اشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها او من تمثيلها المبياني.
- حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية.
- تطبيق الاشتقاق في حساب بعض النهايات.

1 قابلية إشتقاق دالة عددية

1.1 قابلية إشتقاق دالة في نقطة

تعريف 1.

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
نقول إن f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي l بحيث: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$.
العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 و نرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[x_0;\alpha[$.
نقول إن f قابلة للإشتقاق على اليمين في x_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي l بحيث: $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$.
العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في x_0 و نرمز له بالرمز $f'_d(x_0)$.

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]\alpha;x_0]$.
نقول إن f قابلة للإشتقاق على اليسار في x_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي l بحيث: $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$.
العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في x_0 و نرمز له بالرمز $f'_g(x_0)$.

ملحوظة 1. بوضع $h = x - x_0$ يكون $x = h + x_0$ و $\lim\limits_{x\to x_0} h = \lim\limits_{x\to x_0} x - x_0 = 0$.
و بالتالي: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

مثال 1. لندرس قابلية إشتقاق الدالة $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$ في 2:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x+5-(3\times 2^2-2\times 2+5)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x-8}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} 3x+4 \\
&= 10
\end{aligned}$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق في 2 و لدينا العدد المشتق ل f في 2 هو $f'(2) = 10$.

خاصية 1. تكون الدالة f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا و فقط إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في x_0 و على اليسار في x_0 و $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

تمرين 1. ادرس قابلية إشتقاق الدالة f في x_0 في كل حالة من الحالات التالية:

1- $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ و $x_0 = 1$

2- $f(x) = \sin x$ و $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

3- $f(x) = |x-3|$ و $x_0 = 3$

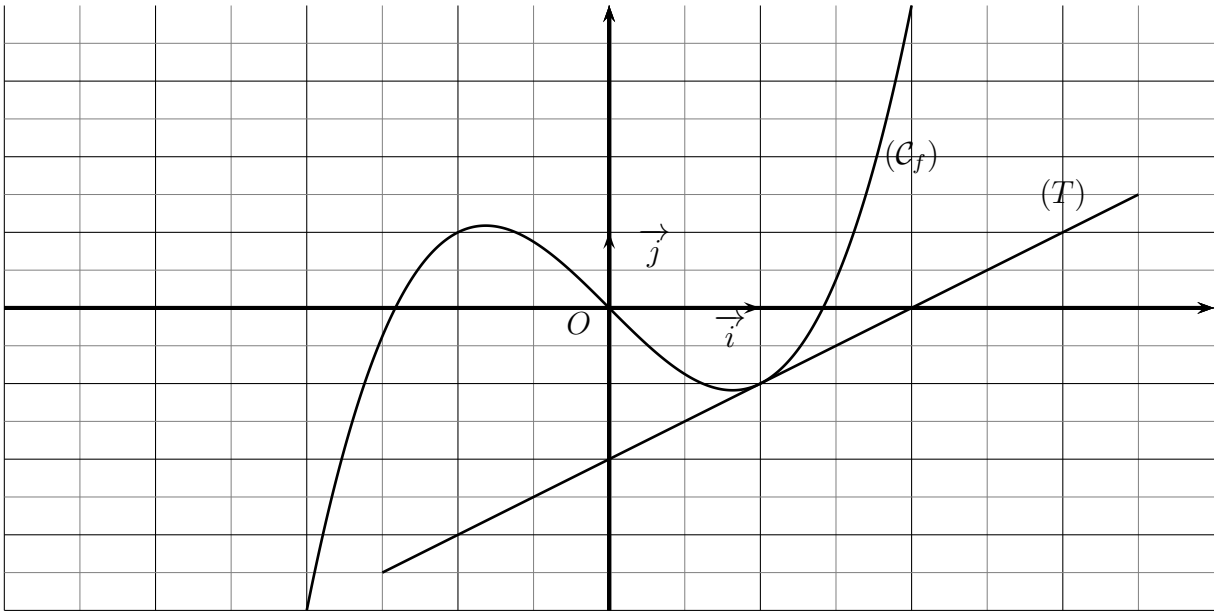
4- $f(x) = |x^2-5x+6|$ و $x_0 = 2$

5- $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x-1} & ;x \leqslant 0 \\ f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 & ;x > 0 \end{cases}$ و $x_0 = 0$

6- $f(x) = \sqrt{|x-4|}$ و $x_0 = 4$

2.1 المماس لمنحنى دالة في نقطة

تعريف 2. لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 و $\mathcal{C}$ المنحنى الممثل لها.
المستقيم الذي معامله الموجه هو $f'(x_0)$ و المار من النقطة $A(x_0; f(x_0))$ يسمى المماس للمنحنى $\mathcal{C}$ في النقطة A.



خاصية 2. لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0.
معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول x_0 هي: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

مثال 2. لنحدد المعادلة المختزلة للمماس (T) لمنحنى الدالة $g : x \mapsto 3x^2$ في النقطة ذات الأفصول 1.
لدينا $g(1) = 3$ و

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}3(x+1)\\ &= 6\end{aligned}$$

إذن $g'(1) = 6$.
و بالتالي المعادلة المختزلة للمماس (T) هي: $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ أي $y = 6x - 3$.

تمرين 2. إعط المعادلة المختزلة لكل من (T_1) و (T_2) و (T_3) المماسات لمنحنى الدالة $f : x \mapsto 2 - x^2$ على التوالي في النقط ذات الأفاصيل -2 و 0 و 1.

ملحوظة 2.

- إذا كانت f تقبل الإشتقاق على اليمين في x_0، (على التوالي على اليسار في x_0) فهذا يعني أن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس $[T_1]$ (على التوالي $[T_2]$) في النقطة ذات الأفصول x_0 معامله الموجه هو $f'_d(x_0)$ (على التوالي هو $f'_g(x_0)$).
  و لدينا: $[T_1) : \begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geqslant x_0 \end{cases}$ و $[T_2) : \begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leqslant x_0 \end{cases}$
- إذا كانت f تقبل الإشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 بحيث $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$، فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ تسمى نقطة مزواة لمنحنى f.

- إذا كانت $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\mp\infty$ أو $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\mp\infty$ فهذا يعني أن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب في النقطة ذات الأفصول x_0.

تمرين 3. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=|x^2-4|$.

1- ادرس قابلية إشتقاق الدالة g على اليمين و على اليسار في 2.

2- حدد نصفي المماس لمنحنى الدالة g على اليمين و على اليسار في النقطة ذات الأفصول 2.

3.1 التقريب التآلفي لدالة بجوار نقطة

تعريف 3. لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0. الدالة $x\mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0 أو التقريب التآلفي للدالة f بجوار x_0.

خاصية 3. لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0. لدينا بجوار x_0: $f(x)\simeq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

مثال 3. لنحدد التقريب التآلفي للدالة $f:x\mapsto\sqrt{1+x}$ بجوار 0 و لنستنتج قيمة مقربة للعدد $\sqrt{1,0008}$:

لدينا $f(0)=\sqrt{1+0}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$ إذن $f'(0)=\frac{1}{2}$،

و بالتالي التقريب التآلفي للدالة f بجوار 0 هو الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي: $g(x)=\frac{1}{2}x+1$.

و بالتالي بجوار 0 لدينا: $f(x)\simeq g(x)$.

إذن $f(0,0008)\simeq g(0,0008)$ أي $\sqrt{1+0,0008}\simeq\frac{1}{2}\times0,0008+1$ أي $\sqrt{1,0008}\simeq1,0004$.

تمرين 4.

1- حدد التقريب التآلفي للدالة $g:x\mapsto\frac{1}{x+1}$ بجوار 0.

2- إستنتج قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{1,006}$.

4.1 قابلية إشتقاق دالة على مجال

تعريف 4.

- نقول أن دالة f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح $]a;b[$ إذا كانت f قابلة للإشتقاق في كل نقطة من $]a;b[$.
- نقول أن دالة f قابلة للإشتقاق على مجال مغلق $[a;b]$ إذا كانت f قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح $]a;b[$ و قابلة للإشتقاق على اليمين في a و على اليسار في b.
- بنفس الطريقة نعرف قابلية إشتقاق دالة على مجالات من نوع $[a;b[$ و $[a;+\infty[$ و $]-\infty;b]$ و $]a;b]$.

مثال 4. لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ: $f(x)=\sqrt{x+1}$.
مجموعة تعريف الدالة f هي: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geqslant0\}=[-1;+\infty[$.

لكن a من $]-1;+\infty[$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{a+1}}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1})}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{a+1}}\end{aligned}$$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح $]-1;+\infty[$.

ولدينا: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\sqrt{x+1}=0^+$

إذن الدالة f لا تقبل الإشتقاق على اليمين في (-1).

نستنتج أن الدالة f معرفة على المجال $[-1;+\infty[$ و قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$.

2 الدالة المشتقة و المشتقات المتتالية

تعريف 5. لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I.

- الدالة المعرفة على I بما يلي: $x\mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على المجال I و نرمز لها بالرمز f'.
- إذا كانت الدالة المشتقة f' قابلة أيضا للإشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f على المجال I و نرمز لها بالرمز f''.
- بنفس الطريقة نعرف الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f حيث $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ و نرمز لها بالرمز $f^{(n)}$. و لدينا: $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$.

مثال 5. لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ: $f(x)=x^3$.

مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية.

لتكن a من $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}x^2+ax+a^2\\ &= 3a^2\end{aligned}$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقتها الاولى هي الدالة $f':x\mapsto 3x^2$.

لتكن a من $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{3x^2-3a^2}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{3(x-a)(x+a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}3(x+a)\\ &= 6a\end{aligned}$$

إذن الدالة f' تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و المشتقة الثانية للدالة f هي الدالة $f'':x\mapsto 6x$.

مشتقات بعض الدوال الإعتيادية

الدالة f	حيز تعريف f	الدالة f'	حيز تعريف f'
$x \mapsto k \ / \ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ / \ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$

ملحوظة 3. نكتب إصطلاحا: $f'(x) = (f(x))'$. مثلا: $(\sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3 العمليات على الدوال المشتقة

خاصية 4. لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I و k عددا حقيقيا.

- الدالة $f+g$ قابلة للإشتقاق على I و لدينا: $(f+g)' = f' + g'$.
- الدالة $k.f$ قابلة للإشتقاق على I و لدينا: $(k.f)' = k.f'$.
- الدالة $f \times g$ قابلة للإشتقاق على I و لدينا: $(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$.
- الدالة $\dfrac{1}{f}$ قابلة للإشتقاق على كل مجال ضمن I لا تنعدم فيه f و لدينا: $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{-f'}{f^2}$.
- الدالة $\dfrac{f}{g}$ قابلة للإشتقاق على كل مجال ضمن I لا تنعدم فيه g و لدينا: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$.

ملحوظة 4. الدوال الحدودية و الدوال الجذرية قابلة للإشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

مثال 6. لنحدد مشتقات الدوال التالية: $f : x \mapsto -6x^5 + 8x^2 - 3$ و $g : x \mapsto \dfrac{x^3 - 6x}{2x+5}$ و $h : x \mapsto \sqrt{x}\cos x$:

- لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-6x^5 + 8x^2 - 3)' \\ &= (-6x^5)' + (8x^2)' + (-3)' \\ &= -6\,(x^5)' + 8\,(x^2)' \\ &= -6 \times 5x^4 + 8 \times 2x \\ &= -30x^4 + 16x \end{aligned}$$

- لكل x من $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{x^3 - 6x}{2x+5}\right)' \\ &= \frac{(x^3-6x)'(2x+5) - (2x+5)'(x^3-6x)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{(3x^2-6)(2x+5) - 2(x^3-6x)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{6x^3 + 15x^2 - 12x - 30 - 2x^3 + 12x}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 15x^2 - 30}{(2x+5)^2} \end{aligned}$$

• **لكل** x **من** $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\sqrt{x}\cos(x))' \\ &= (\sqrt{x})'\cos(x) + (\cos(x))'\sqrt{x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(x) - \sin(x)\sqrt{x} \end{aligned}$$

تمرين 5. **حدد مشتقة الدالة** f **في كل حالة من الحالات التالية:**

(1) $f(x) = 6x^2 + 2\sqrt{x}$ (2) $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + x - 8$ (3) $f(x) = \dfrac{-2x+9}{3x+7}$ (4) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2-7}$

(5) $f(x) = (2x-3)\sin x$ (6) $f(x) = (2x^3 - x)(5x+6)$ (7) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$ (8) $f(x) = \tan x$

خاصية 5. **لتكن** f **دالة قابلة للإشتقاق على مجال** I **و** a **و** b **عددين حقيقيين و** $n \in \mathbb{N}^*$.

- **الدالة** f^n **قابلة للإشتقاق على** I**، و لدينا:** $(f^n)' = n.f' \times f^{n-1}$.
- **الدالة** f^{-n} **قابلة للإشتقاق على كل مجال ضمن** I **لا تنعدم فيه** f**، و لدينا:** $(f^{-n})' = -n.f' \times f^{-n-1}$.
- **الدالة** $\sqrt{f}$ **قابلة للإشتقاق على كل مجال ضمن** I **تكون فيه** f **موجبة قطعا، و لدينا:** $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.
- **الدالة** $x \mapsto f(ax+b)$ **قابلة للإشتقاق في كل** x **من** $\mathbb{R}$ **بحيث** $ax+b \in I$ **و لدينا:** $(f(ax+b))' = a.f'(ax+b)$.

مثال 7. **نعتبر الدالة** f **المعرفة بـ:** $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+3)^5}$.

مميز الحدودية x^2+x+3 **هو:** $\Delta = 1^2 - 4\times1\times3 = -11 < 0$ **و منه الحدودية** x^2+x+3 **لا تنعدم على** $\mathbb{R}$.

و بالتالي الدالة الجذرية f **معرفة و قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$.

و لكل x **من** $\mathbb{R}$ **لدينا:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{(x^2+x+3)^5}\right)' \\ &= ((x^2+x+3)^{-5})' \\ &= -5(x^2+x+3)'(x^2+x+3)^{-6} \\ &= -5(2x+1)(x^2+x+3)^{-6} \\ &= \frac{-5(2x+1)}{(x^2+x+3)^6} \end{aligned}$$

مثال 8. **نعتبر الدالة** g **المعرفة بـ:** $g(x) = \sin(4x-7)$.

لدينا الدالة $\sin$ **قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$**. إذن الدالة** g **قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$.

و لكل x **من** $\mathbb{R}$ **لدينا:**

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\sin(4x-7))' \\ &= 4\sin'(4x-7) \\ &= 4\cos(4x-7) \end{aligned}$$

مثال 9. **نعتبر الدالة** h **المعرفة بـ:** $h(x) = \sqrt{-2x^2+3x-1}$.

مميز الحدودية $-2x^2+3x-1$ **هو:** $\Delta = 3^2 - 4\times(-2)\times(-1) = 1 > 0$ **و منه الحدودية** x^2+x+3 **لها جذران هما:** $\dfrac{-3-1}{2\times(-2)} = 1$ **و** $\dfrac{-3+1}{2\times(-2)} = \dfrac{1}{2}$. **و جدول إشارتها هو:**

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

و بالتالي الدالة h **معرفة على** $[\frac{1}{2};1]$ **و قابلة للإشتقاق على** $]\frac{1}{2};1[$.

و لكل x من $]\frac{1}{2};1[$ لدينا:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\sqrt{-2x^2+3x-1}\right)' \\ &= \frac{(-2x^2+3x-1)'}{2\sqrt{-2x^2+3x-1}} \\ &= \frac{-4x+3}{2\sqrt{-2x^2+3x-1}} \end{aligned}$$

تمرين 6. حدد مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

(1) $f(x)=(4x+2)^3$ (2) $f(x)=\sin(-7x+8)$ (3) $f(x)=\sqrt{5x-3}$

(4) $f(x)=(-3x^3+7x-8)^{-7}$ (5) $f(x)=x^3\cos(3x+1)$ (6) $f(x)=\sqrt{2x^2-5x+6}$

4 رتابة و مطارف دالة قابلة للاشتقاق

مبرهنة 1. نقبل المبرهنة التالية:
لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I.

- إذا كانت f' موجبة قطعا على I فإن f تزايدية قطعا على I.
- إذا كانت f' سالبة قطعا على I فإن f تناقصية قطعا على I.
- إذا كانت f' منعدمة على I فإن f ثابتة على I.

مثال 10. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{5}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-10x+2$.
بما أن f دالة حدودية فإنها معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.
لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=5x^2+5x-10=5(x^2+x-2)$.
مميز الحدودية x^2+x-2 هو: $\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=9>0$.
و منه للحدودية x^2+x-2 جذرين هما: $\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times1}=-2$ و $\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times1}=1$.
و بالتالي جدول إشارة المشتقة f':

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه f تزايدية قطعا على كل من المجالين $]-\infty;-2]$ و $[1;+\infty[$ و تناقصية قطعا على المجال $]-2;1[$.
نشرك مع جدول تغيرات الدالة f جدول إشارة مشتقتها f' و نهايات f عند محدات حيز تعريفها و مطارفها:
نهايات f عند محدات حيز تعريفها: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{3}x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{3}x^3=+\infty$
جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{56}{3}$	↘	$-\frac{23}{6}$	↗	$+\infty$

خاصية 6. لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I و $x_0\in I$.

- إذا كان $f(x_0)$ مطرافا للدالة f فإن f' تنعدم في x_0.
- إذا كانت f' تنعدم في x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ مطرافا للدالة f.

مثال 11. نعتبر الدالة العددية h المعرفة ب: $h(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2$.
بما أن h دالة حدودية فإنها معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.
لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $h'(x) = 12x^3 + 24x^2 + 12x = 12x(x+1)^2$.
و بالتالي جدول إشارة المشتقة h':

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$12x$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

المشتقة h' تنعدم في (-1) و 0 لكن لا تغير إشارتها إلا عند 0. إذن للدالة h مطراف واحد هو: $h(0) = 0$.

تمرين 7. احسب $f'(x)$ ثم إستنتج رتابة الدالة f و حدد مطارفها إن وجدت، في كل حالة من الحالات التالية:

(1) $f(x) = 2x^3 - 6x^2$ (2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$ (3) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (4) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

(5) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$ (6) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2+1}$ (7) $f(x) = x^3(2-x)$ (8) $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 1$

5 المعادلة التفاضلية: $y'' + w^2 y = 0$

تعريف 6. ليكن w عددا حقيقيا.
المتساوية $y'' + w^2 y = 0$ حيث المجهول y دالة عددية مشتقتها الثانية y'' تسمى معادلة تفاضلية.
مثال 12. المعادلات التالية هي معادلات تفاضلية من نوع $y'' + w^2 y = 0$:
$16y + y'' = 0$ ؛ $f'' + 2f = 0$ ؛ $25y'' + 16y = 0$ ؛ $-g'' - 9g = 0$.
مبرهنة 2.
حلول المعادلة التفاضلية $y'' + w^2 y = 0$ حيث $w \in \mathbb{R}^*$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$x \mapsto a\cos wx + b\sin wx$ مع a و b عددان حقيقيان.
حلول المعادلة التفاضلية $y'' = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ax + b$ مع a و b عددان حقيقيان.
مثال 13. لنحدد g حل المعادلة التفاضلية $(E) : y'' + 9y = 0$ الذي يحقق $g(0) = g'(0) = 1$:
حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $x \mapsto \alpha\cos 3x + \beta\sin 3x$ مع α و β عددان حقيقيان.
ليكن $x \in \mathbb{R}$.
نضع $g(x) = \alpha\cos 3x + \beta\sin 3x$ حيث α و β عددان حقيقيان.
إذن $g'(x) = -3\alpha\sin 3x + 3\beta\cos 3x$.

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cos 0 + \beta\sin 0 = 1 \\ -3\alpha\sin 0 + 3\beta\cos 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

و بالتالي الدالة g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = \cos 3x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

تمرين 8. نعتبر المعادلة التفاضلية $(E) : y'' + 4y = 0$.

1ـ حدد مجموعة حلول المعادلة (E).

2ـ حدد الدالة f حل المعادلة (E) التي تحقق $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ و $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$.

تمرين 9. لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \lambda\cos(-2x + \theta)$ مع λ و θ من $\mathbb{R}$.
بين أن f حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.